

1 bod

- 1 $\mathbb{Z}$ je množina všech celých čísel, $A = (-2; 3)$.

Určete všechny prvky množiny $A \cap \mathbb{Z}$.

$$A \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}$$

1 bod

- 2 Vypočtete 50 % z čísla 2^{1000} .

Výsledek vyjádřete rovněž ve tvaru mocniny.

$$2^{999}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení.

Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity.

V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

(CZVV)

max. 2 body

- 3 Počet míst k sezení v jednom vagonu označme n .

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok

- 3.1 byli ve vlaku; $3n + 30$

- 3.2 ve vlaku stáli. $0,25n + 30$

OBSAZENO $\frac{1}{2}$ Z KAPACITY

$$\text{KAPACITA} = 3(n + n + 20) = 6n + 60$$

$$\rightarrow \text{OBSAZ. } 3n + 30$$

$$\text{SEDELI } n + n + 0,75n \rightarrow \text{STA'LI } 0,25n + 30$$

- 4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte:

$$\frac{1 + \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3} - 3} = \frac{3}{a(a-3)}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

$$\frac{1 + \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3} - 3} = \frac{\frac{a+3}{a}}{\frac{a^2-9}{3}} = \frac{a+3}{a} \cdot \frac{3}{(a+3)(a-3)} = \frac{3}{a(a-3)}$$

- 5 V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici:

$$\frac{2x+8}{4x^2-8x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

$$\frac{2x+8}{4x^2-8x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x} \quad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{array}$$

$4x(x-2)$

$$2x+8 - 10(x-2) = 4(x-2)$$

$$2x+8 - 10x+20 = 4x-8$$

$$36 = 12x$$

$$\underline{\underline{x=3}}$$

$$X = \{3\}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Na zámek přišly pouze dvě třetiny všech účastníků zájezdu, ale na prohlídku zámku čtyři z těchto příchozích nešli. Prohlídky zámku se tak zúčastnila jen polovina všech účastníků zájezdu.

(CZVV)

1 bod

6 Určete počet všech účastníků zájezdu.

$$\frac{2}{3}u - 4 = \frac{1}{2}u$$

$$4u - 24 = 3u$$

$$\underline{\underline{u = 24 \text{ účastníků}}}$$

max. 2 body

7 Kvadratická funkce má předpis $y = 2x^2 - 3x$. Její graf protíná přímka p ve dvou různých bodech $P[p_1; 9]$ a $Q[q_1; 9]$.

Vypočtěte souřadnice p_1, q_1 bodů P, Q .

$$9 = 2p_1^2 - 3p_1$$

$$2p_1^2 - 3p_1 - 9 = 0$$

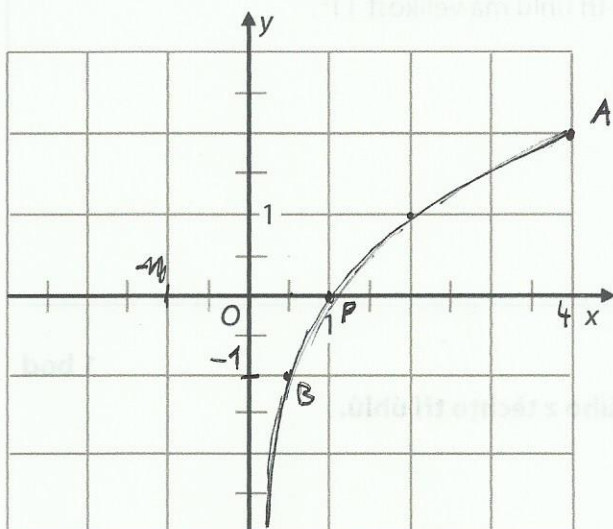
$$D = 81 \quad p_1 = \frac{3 \pm 9}{4} \begin{cases} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{3 \pm 9}{4} \begin{cases} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{K} = \{P, Q\} = \left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Je dána funkce $f: y = \log_2 x$.



(CZVV)

max. 3 body

8

- 8.1 Dopačtěte souřadnici a_2 bodu $A[4; a_2]$ grafu funkce f .
- 8.2 Dopačtěte souřadnici b_1 bodu $B[b_1; -1]$ grafu funkce f .
- 8.3 Sestrojte graf funkce f s přesně vyznačenými body A, B a průsečíkem P grafu funkce f se souřadnicovou osou x .

V záznamovém archu obtahněte vše propisovací tučkou.

$$y_1 = \log_2 4 = 2$$

$$-1 = \log_2 x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

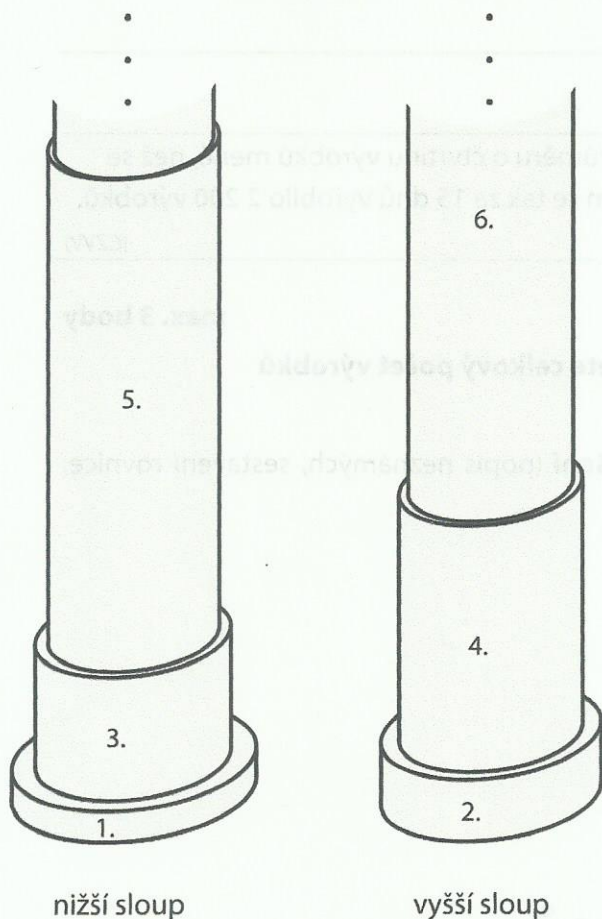
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

V Kocourkově navrhli nereálný plán stavby dvou sloupů sahajících do nebe.

Na stavbu se má použít celkem 20 válců. Jednotlivé válce jsou podle výšky označeny pořadovými čísly od 1 do 20.

Nejnižší je 1. válec s výškou 1 m, 2. válec má výšku 2 m a rovněž každý další válec je dvakrát vyšší než válec s pořadovým číslem o 1 nižším. (Tedy 3. válec má výšku 4 m, 4. válec 8 m atd.)

Nižší sloup bude postaven ze všech válců označených lichými pořadovými čísly od 1 do 19; vyšší sloup ze všech válců označených sudými pořadovými čísly od 2 do 20.



(CZVV)

max. 2 body

9 Určete v metrech

9.1 výšku 20. válce;

9.2 výšku nižšího sloupu.

1. 1

2. $2 \cdot 1 = 2$

3. $2 \cdot 2 = 2^2$

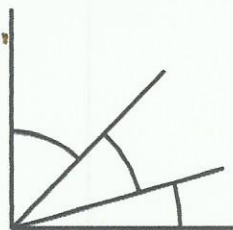
4. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

20. $2^{19} = 524288$ metrů

$$1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{18} = 349525 \text{ metrů}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Pravý úhel je rozdělen na tři úhly, jejichž velikosti tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Nejmenší z těchto tří úhlů má velikost 11° .



(CZVV)

1 bod

- 10 Určete ve stupních velikost největšího z těchto tří úhlů.

$$x + y + z = 90^\circ$$

$$(11^\circ) + (11^\circ + m) + (11^\circ + 2m) = 90^\circ \quad z = 11 + 2m = 49^\circ$$

$$3m = 57 \quad m = 19$$

1 bod

- 11 Pro dva různé úhly $\alpha = 112^\circ, \beta \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ platí $\cos \alpha = \cos \beta$.

Určete ve stupních velikost úhlu β .



$$\beta = 248^\circ$$

1 bod

- 12 V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici:

$$\frac{25^x}{5} = 5 \cdot 5^{x-2}$$

$$5^{2x-1} = 5^{x-1}$$

$$2x-1 = x-1$$

$$2x = x$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Trojmístný kód obsahuje vždy písmeno A a dvě **různé** číslice z deseti možných (0–9).
Vyhovují např. kódy A36, 0A1, 69A.

(CZVV)

1 bod

- 13 Určete počet všech možných kódů vyhovujících zadání.

možnosti

$$A \underline{1A} \underline{10} \underline{9} \text{ NEBO } \underline{10} \underline{A} \underline{9} \text{ NEBO } \underline{10} \underline{9} \underline{A} \Rightarrow 3 \cdot 10 \cdot 9 = \underline{\underline{270}}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně, než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se tak za 15 dnů vyrobilo 2 200 výrobků.

(CZVV)

max. 3 body

- 14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic určete celkový počet výrobků vyrobených za prvních 5 dnů.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

$$5 \cdot 0,75x + 10x = 2200$$

$$13,75x = 2200$$

$$x = 160$$

$$5 \cdot 0,75x = 600 \text{ VÝROBKŮ}$$

- 15 Rotační válec, jehož výška je rovna průměru podstavy, má objem 1 litr.

Vypočtěte v cm výšku tohoto válce.

Výsledek zaokrouhlete na desetiny cm.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.



$$1\text{ l} = 1000\text{ cm}^3$$

$$V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot d$$

$$1000 = \pi \cdot \frac{d^2 \cdot d}{4}$$

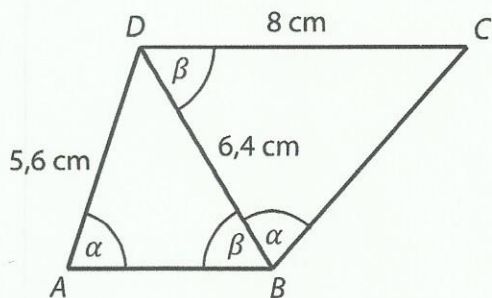
$$d^3 \doteq 1273,24$$

$$\underline{\underline{d \doteq 10,8\text{ cm}}}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 16

Lichoběžník $ABCD$ je rozdělen úhlopříčkou na dva podobné trojúhelníky ABD a BDC .
V trojúhelnících jsou vyznačeny dvě dvojice shodných úhlů α, β .

Platí: $|AD| = 5,6 \text{ cm}$, $|BD| = 6,4 \text{ cm}$, $|CD| = 8 \text{ cm}$.



(CZVV)

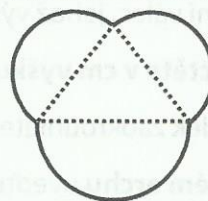
max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- | | A | N |
|--|-------------------------------------|--------------------------|
| 16.1 $ AB : BD = BD : CD $ | ☒ | ☐ |
| 16.2 Obvod trojúhelníku BDC je 1,25krát větší než obvod trojúhelníku ABD . | ☒ | ☐ |
| 16.3 $ AB = 5,12 \text{ cm}$ | ☒ | ☐ |
| 16.4 $ BC = 7 \text{ cm}$ | ☒ | ☐ |

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Obrazec je ohraničen třemi půlkružnicemi.
Společné krajní body půlkružnic tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku se základnou délky 12 cm.
Obsah tohoto trojúhelníku je 48 cm^2 .



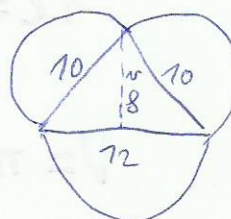
(CZVV)

2 body

17 Jaký je obvod obrazce ohraničeného třemi půlkružnicemi?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

- A) menší než 35 cm
- B) 36 cm
- C) 39 cm
- ☒ D) 50 cm
- E) větší než 51 cm

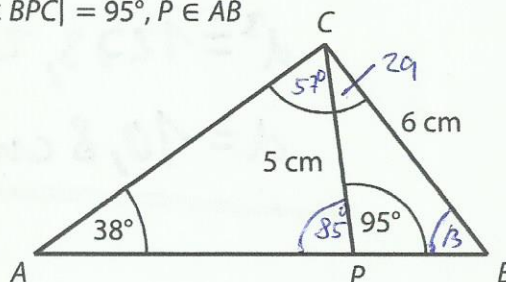


$$2\pi \cdot 5 + \frac{1}{2} \pi \cdot 6 \approx 50 \text{ cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

V trojúhelníku ABC platí:

$|BC| = 6 \text{ cm}$, $|CP| = 5 \text{ cm}$, $|\angle BAC| = 38^\circ$, $|\angle BPC| = 95^\circ$, $P \in AB$



(CZVV)

2 body

18 Jaká je velikost vnitřního úhlu ACB v daném trojúhelníku?

Výsledek je zaokrouhlen na celé stupně.

- A) 83°
- ☒ B) 86°
- C) 90°
- D) 102°
- E) větší než 103°

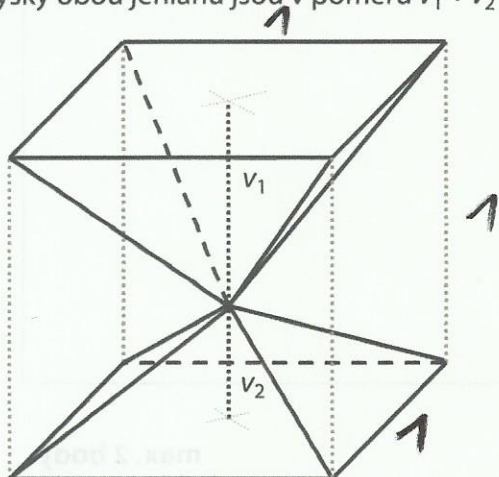
$$\frac{6}{\sin 95^\circ} = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$\beta \approx 56^\circ$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V krychli jsou dva čtyřboké jehlany umístěny tak, že mají společný hlavní vrchol a podstavy obou jehlanů tvoří rovnoběžné stěny krychle.

Výšky obou jehlanů jsou v poměru $v_1 : v_2 = 3 : 2$.



(CZVV)

2 body

19 Jakou část objemu krychle tvoří objem většího z obou jehlanů?

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{9}$

☒ D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{6}$

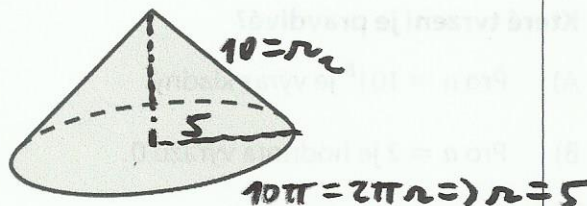
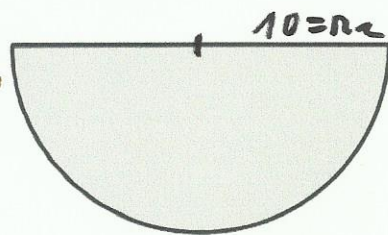
$$a=1$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{3}{5}$$

$$V_j = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Rozvinutý plášť rotačního kužele tvoří půlkruh o poloměru 10 cm.



(CZVV)

2 body

20 Jaký je povrch kužele (včetně podstavy)?

- ☒ A) $75\pi \text{ cm}^2$
- ☐ B) $100\pi \text{ cm}^2$
- ☐ C) $125\pi \text{ cm}^2$
- ☐ D) $150\pi \text{ cm}^2$
- ☐ E) jiný povrch

$$S = \frac{1}{2} \pi r_l^2 = 50\pi$$

$$+ P_{\text{podstava}} = \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow 75\pi \text{ cm}^2$$

2 body

21 V rovině jsou dány body $A[-21; 9]$, $B[15; -5]$ a $P[0; -2]$.
Bod S je střed úsečky AB .

Jaká je vzdálenost bodů P, S ?

- ☐ A) 3,5
- ☐ B) 4
- ☐ C) 4,5
- ☒ D) 5
- ☐ E) jiná vzdálenost

$$S_{AB} = \left[-3; 2 \right]$$

$$|PS_{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

2 body

- 22 V geometrické posloupnosti platí:

$$a_2 = \sqrt[3]{3}$$

$$a_3 = -\sqrt[3]{9}$$

Jaká je hodnota součtu $a_1 + a_4$?

- ☒ A) 2
B) 1
C) 0
D) -1
E) jiná hodnota

2 body

- 23 Pro kterou z následujících nerovnic s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je množinou všech řešení interval $(-\infty; 0)$?

- A) $-2x < 0$
B) $\frac{x}{x-1} < 0$
C) $\frac{x}{-2} \geq 0$
D) $\frac{2x}{x} < 0$
☒ E) $2x < x$

- 24 Je dán výraz $\frac{12(a-2)^2}{12-6a}$ s reálnou proměnnou a .

Které tvrzení je pravdivé?

- A) Pro $a = 101^8$ je výraz kladný.
 B) Pro $a = 2$ je hodnota výrazu 0.
☒ C) Hodnota výrazu nemůže být nikdy nulová.
 D) Pro všechna $a \neq \frac{1}{6}$ je výraz roven $\frac{(a-2)^2}{1-6a}$.
 E) Pro některá a je výraz roven $2(a-2)$.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 25

V rodině Novotných mají 4 děti, a to 2 dívky a 2 chlapce. V rodině Dlouhých mají také 4 děti, ale jen 1 dívku a 3 chlapce.

Z uvedených osmi dětí se vylosuje dvojice dětí.

(CZVV)

max. 4 body

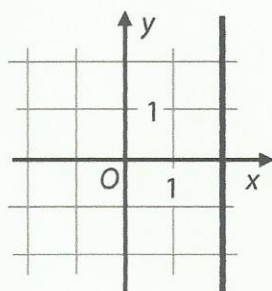
- 25 Přiřadte ke každému z následujících jevů (25.1–25.4) pravděpodobnost (A–F), s kterou může daný jev nastat.

- 25.1 Ve vylosované dvojici budou dvě dívky. C
 25.2 Ve vylosované dvojici budou dva chlapci. F
 25.3 Ve vylosované dvojici budou oba chlapci Novotných. A
 25.4 Ve vylosované dvojici bude 1 chlapec Novotných a 1 dívka Dlouhých. B

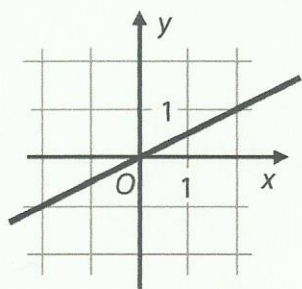
- A) $\frac{1}{28}$
 B) $\frac{1}{14}$
 C) $\frac{3}{28}$
 D) $\frac{1}{7}$
 E) $\frac{3}{14}$
 F) $\frac{5}{14}$

26 Přiřadte ke každé přímce (26.1–26.3) její analytické vyjádření (A–E).

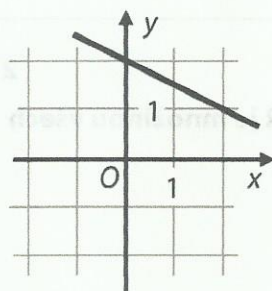
26.1

E

26.2

C

26.3

B

A) $y = -x + 2$

B) $x + 2y - 4 = 0$

C) $x = 2 + 2t,$
 $y = 1 + t, t \in \mathbb{R}$

D) $x = t,$
 $y = 2, t \in \mathbb{R}$

E) $x = 2,$
 $y = t, t \in \mathbb{R}$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.
